Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
10 класс (Европа)

▷ **1.** Решите уравнение $x^2-\sqrt{224-x}=224$. В ответе запишите сумму целых частей найденных решений.

Решение:
Обозначим число 224 буквой a. Получим уравнение с параметром: $x^2-\sqrt{a-x}=a$. Перенесём корень в правую часть, параметр a в левую часть и возведём уравнение в квадрат. Полученное уравнение рассмотрим как квадратное относительно a: $a^2-(2x^2+1)a+x^4+x=0$.
Его дискриминант $D=(2x^2+1)^2-4(x^4+x)=(2x-1)^2$, поэтому $a=\frac{(2x^2+1)\pm(2x-1)}{2}$.
Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения: $a=x^2+x$ или $a=x^2-x+1$.
Выясним, какие корни этих квадратных (уже относительно x) уравнений нужно включить в ответ, а какие — посторонние. Из начальной записи $x^2-a=\sqrt{a-x}$, так что $x^2-a\geqslant 0$. Для первого уравнения имеем $x^2-a=-x$, следовательно, $x\leqslant 0$; для второго уравнения: $x^2-a=x-1$, в этом случае оставляем только корень $x\geqslant 1$. Положим назад $a=224$. Для первого уравнения $x^2+x-224=0$ отрицательный корень равен $x_1=-\frac{1+\sqrt{896+1}}{2}$, $-15,5<x_1<-15$. Для второго уравнения в ответ войдёт корень, больший 1: $x_2=\frac{1+\sqrt{892+1}}{2}$, $15<x_2<15,5$.
$x_1+x_2=-16+15=-1$.
Ответ: -1.

▷ **2.** Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ - десятичная запись k-значного числа. Найдите все шестизначные числа, для которых выполняется соотношение
$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}=\overline{a_1a_2a_3}\cdot\overline{a_4a_5a_6}+2024$.

Решение:
$\overline{a_1a_2a_3}=x\in[100;999], \overline{a_4a_5a_6}=y\in[100;999]$
$1000x+y=x\cdot y+2024$
$(x-1)y-1000(x-1)+1024=0$
$(x-1)(1000-y)=1024=2^{10}$
$\begin{cases}x-1=128\\1000-y=8\end{cases}\quad\begin{cases}x=129\\y=992\end{cases}$
$\begin{cases}x-1=256\\1000-y=4\end{cases}\quad\begin{cases}x=257\\y=996\end{cases}$
$\begin{cases}x-1=512\\1000-y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=513\\y=998\end{cases}$
$129992-129\cdot 992=2024$
$257996-257\cdot 996=2024$
$513998-513\cdot 998=2024.$
Ответ: $(129992, 257996, 513998)$.

▷ **3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2000 отрицательных. Сколько из исходных чисел равны 0?

Решение:
Пусть среди написанных чисел x положительных и y отрицательных. (x, y — натуральные числа, $x+y\leqslant 100$). Так как отрицательное произведение возникает только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно xy отрицательных. Имеем $xy=2000$. Тогда наибольшее из чисел x и y не превосходит $\sqrt{2000}$, т. е. не менее 44. Кроме того, это число является делителем числа $2000=2^4\cdot 5^3$, поэтому в его разложении на простые множители присутствуют только числа 2 и 5, причём 2 в степени не больше, чем 4. Легко видеть, что такими числами, лежащими в интервале $[44;100]$, будут только числа 50 и 100. Из уравнения $xy=2000$ находим, что второе число при этом будет равняться 20 или 1 соответственно. Пара (100;1) не удовлетворяет условию $x+y\leqslant 100$. Остаётся два варианта: 50 отрицательных чисел, и 20 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 70, а поэтому среди исходных чисел ровно 30 нулевых.
Ответ: 30.

▷ **4.** В 28-значное число 3*4*1*0*8*2*40923*0*320*2*56 случайным образом вместо звездочек записываются цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Какова вероятность, что полученное число будет делиться на 396?

Решение:
Для того, чтобы число делилось на 396, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, 9 и 11. Поскольку число оканчивается на 56, то оно делится на 4. Сумма цифр числа равна 99, поэтому оно делится на 9. Сумма цифр стоящих на нечетных местах равна 44, на четных 55, их разность делится на 11. Т.е. всегда делится на 11. Достоверное событие.
Ответ: 1.

▷ **5.** Сколько существует троек различных целых чисел, удовлетворяющих условию: квадрат любого из них на 2025 меньше произведения двух других чисел?

Решение:

Пусть $a>b>c$ искомые целые числа $\begin{cases} a^2=bc+2025 & (1)\\ b^2=ac+2025 & (2)\\ c^2=ab+2025 & (3)\end{cases}$

$(1)-(2) \Longrightarrow (a-b)(a+b+c)=0 \Longrightarrow a+b+c=0$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$

$3ab+3bc+3ca=-3\cdot 2025$

$\begin{cases} ab+bc+ca=-2025\\ a+b+c=0\end{cases}$ $\quad ab-(a+b)^2=-2025$, $a^2+ab+b2=2025$

$(a+\frac{b}{2})^2=2025-\frac{3}{4}b^2 \Longrightarrow |b|\sqrt{\frac{4\cdot 2025}{3}}$; $\left[\frac{4\cdot 2025}{3}\right]=51$

$b=-51,-50,\dots,50,51$

$a=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{2025-\frac{3}{4}b^2}$,

$2025-\frac{3}{4}b^2=$,

$b=0$, $a=\pm 45$, $c=\mp 45$, 2 решения

В силу симметрии 6 решений:

$(0;45;-45),(0;-45;45),(45;0;-45),(-45;0;45),(45;-45;0),(-45;45;0)$.

Покажем, что уравнение $2025-\frac{3}{4}b^2=h^2$ решений, кроме $b=0$, не имеет. Пусть

$b=2b_1$ $2025=3b_1^2+h^2$, $2025\vdots 3\Longrightarrow h^2\vdots 3$, $h=3h_1$

$675=3b_1^2+3h_1^2$, $675\vdots 3\Longrightarrow b_1^2\vdots 3$, $b_1=3b_2$

$225=3b_2^2+3h_1^2$, $225\vdots 3\Longrightarrow h_1^2\vdots 3$, $h_1=3h_2$

$75=3b_2^2+3h_2^2$, $75\vdots 3\Longrightarrow b_2^2\vdots 3$, $b_2=3b_2$

$25=3b_3^2+3h_2^2$, решений нет.

▷ **6.** Вычислите $\frac{(2^3-1)(3^3-1)\dots(50^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\dots(50^3+1)}$. Ответ запишите в виде несократимой обыкновенной дроби.

Решение:

Решим задачу в общем случае: $S=\frac{(2^3-1)(3^3-1)\dots(50^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\dots(50^3+1)}$

$k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$, $k^3+1=(k+1)(k^2-k+1)$

Введем следующие обозначения: $a_k=k^2+k+1$, $b_k=k^2-k+1$.

Нетрудно показать, что $a_k=b_{k+1}$

В этом случае $S=\frac{(2-1)(2^2+2+1)\cdot(3-1)(3^2+3+1)\dots(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)\cdot(3+1)(3^2-3+1)\dots(n+1)(n^2-n+1)}=\frac{1\cdot a_2\cdot 2\cdot a_3\cdot\ldots(n-1)\cdot a_n}{3\cdot b_2\cdot 4\cdot b_3\cdot\ldots(n+1)\cdot b_n}=\frac{2\cdot a_n}{b_2\cdot n(n+1)}=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{n^2+n})=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{50^2+50})=\frac{2551}{3825}$.

Ответ: $\frac{2551}{3825}$.

▷ **7.** Какие последние три цифры содержит запись числа 7^{2024}?

Решение:

Последние 4 цифры

$7^1=7$	$7^2=49$	$7^3=343$	$7^4=2401$	$7^5=6807$	$7^6=7649$	$7^7=3543$
$7^8=4801$	$7^9=3607$	$7^{10}=5249$	$7^{11}=6743$	$7^{12}=7201$	$7^{13}=0407$	$7^{14}=2849$
$7^{15}=9943$	$7^{16}=9601$	$7^{17}=7207$	$7^{18}=0449$	$7^{19}=3143$	$7^{20}=2001$	$7^{21}=4007$
$7^{22}=8049$	$7^{23}=6343$	$7^{24}=4401$	$7^{25}=0807$	$7^{26}=6649$	$7^{27}=9543$	$7^{28}=6801$

$2024=20*101+4$

$7^{2024}=(7^{20})^{101}\cdot 7^4\equiv 2001\cdot 2401\equiv 401$

Ответ: 401.

▷ **8.** Запись положительного числа, кратного девяти, состоит только из цифр 3 и 7. Сумма всех его цифр делится на 11. Найдите наименьшее такое число.

Решение:

k троек, n семерок. Тогда $3k+7n=99t$ $k+n\to\min\Rightarrow t=1$ $3k+7n=99\Rightarrow$

$n=3n_1\Rightarrow k+7n_1=33$

n_1	1	2	3	4
k	26	19	12	5
n	3	6	9	12
$k+n$	29	25	21	17

Ответ: $\underbrace{33...3}_{5}\underbrace{77...7}_{12}$.

▷ **9.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначается знаками "!" и "?", но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b, b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a,b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков "!", "?" записать выражение, которое гарантированно равно $25a-20b$.

Решение:

Заметим, что выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. в дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию $+$ с двумя аргументами. Выражение $0?((0!(x!0))?0)$ всегда равно $-x$.

Теперь легко выписать искомое выражение

$((...(\underbrace{a+a)+...+a}_{+24})+(-((...(\underbrace{b+b)+...+b}_{+19}))$.

▷ **10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел m, n, k таких, что $m^3+n^3+k^3=96059601$.

Решение:

$S(96059601) = 9 \cdot 10673289 (= N_1) = 9^2 \cdot 1185921 (= N_2) = 9^3 \cdot 131769 (= N_3) = 9^4 \cdot 14641 (= N_4) =$

$S(N) = 36, S(N_1) = 36, N_1 \vdots 9, S(N_2) = 27, N_2 \vdots 9, S(N_3) = 27, N_3\ vdot 9, N_4 \vdots 11 = 11 \cdot 1331 = 11^2 \cdot 121 = 11^4$ $S_1 = 1 + 6 + 1 = 8, S_2 = 4 + 4 = 8, S_1 - S_2 = 0$

$N = 9^4 \cdot 11^4 = 99^4$

$m = \alpha \cdot 99, n = \beta \cdot 99, k = \gamma \cdot 99$

$2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 2^3 + 3^3 + 4^3 = 99$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 99$

$\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4$

$(198, 297, 396).$

Ответ: (198,297,396).